

Минимальные носители некоторых графов Хэмминга

Alexandr Valyuzhenich

9 декабря 2015 г.

Аннотация

В работе найдены минимальные носители собственных функций графов Хэмминга $H(n, q)$ с собственным значением $n(q-1) - q$. Кроме того, получена полная характеристика собственных функций, на которых достигается минимальное значение носителя.

1 Введение

Расстоянием Хэмминга $d(x, y)$ между словами $x, y \in \{0, 1, \dots, q-1\}^n$ называется число позиций, в которых x и y различны. Графом Хэмминга называется граф, вершины которого — это все слова длины n над алфавитом $\{0, 1, \dots, q-1\}$, а ребрами графа соединяются вершины на расстоянии Хэмминга 1. Обозначим граф Хэмминга через $H(n, q)$. Хорошо известно, что множество собственных значений матрицы смежности графа $H(n, q)$ — это $\{\lambda_m = n(q-1) - qt \mid t = 0, 1, \dots, n\}$. Функция $f : H(n, q) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *собственной функцией* графа $H(n, q)$, отвечающей собственному значению λ , если $Af = \lambda f$, где A — матрица смежности $H(n, q)$. Пусть $f : H(n, q) \rightarrow \mathbb{R}$. Множество $S(f) = \{x \in H(n, q) \mid f(x) \neq 0\}$ называется *носителем функции* f . Для носителя собственной функции известна следующая нижняя оценка:

Теорема 1 ([1]). Пусть $f : H(n, q) \rightarrow \mathbb{R}$ — собственная функция, отвечающая собственному значению λ_m и $f \not\equiv 0$. Тогда $|S(f)| \geq 2^m (q-2)^{n-m}$ для $\frac{mq^2}{2n(q-1)} > 2$ и $|S(f)| \geq q^n (\frac{1}{q-1})^{m/2} (\frac{m}{n-m})^{m/2} (1 - \frac{m}{n})^{n/2}$ для $\frac{mq^2}{2n(q-1)} \leq 2$.

Из результатов работы [2] следует, что для мощности носителя собственной функции $f : H(n, q) \rightarrow \{-1, 0, 1\}$, отвечающей собственному значению $\lambda = q(n-m) - n$, выполнена нижняя оценка $|S(f)| \geq 2^m$.

2 Лемма о редукции

Множество вершин x графа $H(n, q)$, у которых i -я координата равна k , обозначим через $T_k(i, n)$.

Пусть $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ — произвольная вершина графа $H(n, q)$. Рассмотрим вектора $x = (t_1, \dots, t_{i-1}, k, t_i, \dots, t_n)$ и $y = (t_1, \dots, t_{i-1}, m, t_i, \dots, t_n)$ длины $n + 1$. Заметим, что $x \in T_k(i, n + 1)$ и $y \in T_m(i, n + 1)$, и вектор t получается из вершин x и y удалением i -ой координаты. Определим функцию $g_{i,k,m} : H(n, q) \rightarrow \mathbb{R}$ по правилу $g_{i,k,m}(t) = f(x) - f(y)$.

Лемма 1. Пусть $f : H(n + 1, q) \rightarrow \mathbb{R}$ — собственная функция, отвечающая собственному значению λ . Тогда $g_{i,k,m}(t)$ — собственная функция в графе $H(n, q)$, отвечающая собственному значению $\lambda + 1$.

Доказательство. Пусть $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ — произвольная вершина графа $H(n, q)$. Рассмотрим вершины $x = (t_1, \dots, t_{i-1}, k, t_i, \dots, t_n)$ и $y = (t_1, \dots, t_{i-1}, m, t_i, \dots, t_n)$ графа $H(n + 1, q)$. Заметим, что $x \in T_k(i, n + 1)$ и $y \in T_m(i, n + 1)$, причем x и y смежны. Пусть x_1, x_2, \dots, x_s — соседи x среди вершин из $T_k(i, n + 1)$. Заметим, что y среди вершин из $T_m(i, n + 1)$ имеет соседей y_1, y_2, \dots, y_s , причем x_t и y_t отличаются только в i -ой координате. Вектор длины n , полученный удалением из вершин x_t и y_t i -ой координаты, обозначим через z_t . Пусть p_t — сосед вершины x , лежащий в $T_t(i, n + 1)$, и $P = \{p_0, p_1, \dots, p_{q-1}\}$. Тогда $N(x) = \{x_1, x_2, \dots, x_s\} \cup \{P \setminus x\}$. Так как f — собственная функция, то имеем

$$\lambda f(x) = \sum_{i=1}^s f(x_i) + \sum_{i=0}^{q-1} f(p_i) - f(x). \quad (1)$$

Аналогичным образом имеем $N(y) = \{y_1, y_2, \dots, y_s\} \cup \{P \setminus y\}$. Так как f — собственная функция, то имеем

$$\lambda f(y) = \sum_{i=1}^s f(y_i) + \sum_{i=0}^{q-1} f(p_i) - f(y). \quad (2)$$

Вычитая из соотношения 1 соотношение 2, получаем

$(\lambda + 1)(f(x) - f(y)) = \sum_{i=1}^s (f(x_i) - f(y_i))$. Тогда $(\lambda + 1)g_{i,k,m}(t) = \sum_{i=1}^s g_{i,k,m}(z_i)$ для произвольной вершины t . Так как в графе $H(n, q)$ вершина t имеет соседей z_1, z_2, \dots, z_s , то $g_{i,k,m}(t)$ — собственная функция в графе $H(n, q)$. □

Функцию $f : H(n + 1, q) \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *аддитивной*, если для любых допустимых i, k, m функция $g_{i,k,m}$ является константой.

Лемма 2. Пусть $f : H(n + 1, q) \rightarrow \mathbb{R}$ — собственная функция, отвечающая собственному значению λ_1 . Тогда f — аддитивная функция.

Доказательство. Достаточно доказать, что для всех допустимых i, j и p функция $g_{p,i,j}$ является константой. По лемме 1 функция $g_{p,i,j}$ является собственной функцией графа $H(n, q)$, отвечающей собственному значению

λ_0 . Так как λ_0 имеет кратность 1, то любая собственная функция графа $H(n, q)$, отвечающая собственному значению λ_0 , является константой. Лемма доказана. \square

3 Основная теорема

Множество вершин x графа $H(n, q)$, у которых i -я координата равна k , обозначим через $T_k(i, n)$.

Лемма 3. Пусть $f : H(2, q) \rightarrow \mathbb{R}$ — аддитивная функция, $|S(f)| \leq 2(q-1)$. Тогда выполнено одно из следующих условий:

1. $f \equiv 0$.
2. $f(x) = c$ при $x \in T_k(i, 2)$ и $f(x) = 0$ в остальных случаях, где $c \neq 0$ — некоторая константа.
3. $f(x) = \begin{cases} c, & \text{при } x \in T_k(i, 2) \setminus T_m(j, 2); \\ -c, & \text{при } x \in T_m(j, 2) \setminus T_k(i, 2); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$ где $c \neq 0$ — некоторая константа и $i \neq j$.

Доказательство. Так как $|S(f)| \leq 2(q-1)$, то $f(x) = 0$ для некоторого x . Без ограничения общности, пусть $f(x_0) = 0$, где $x_0 = (0, 0)$. Значения f при $x = (0, j)$ и $x = (i, 0)$ обозначим через a_j и b_i соответственно. Пусть среди чисел a_1, \dots, a_{q-1} ровно k ненулевых, среди b_1, \dots, b_{q-1} ровно s ненулевых. Множество вершин $x = (i, j)$ таких, что $j > 0$, $f(y) \neq 0$ для $y = (i, 0)$ и $f(z) = 0$ для $z = (0, j)$, обозначим через B . Множество вершин $x = (i, j)$ таких, что $i > 0$, $f(y) = 0$ для $y = (i, 0)$ и $f(z) \neq 0$ для $z = (0, j)$, обозначим через C .

Пусть $x = (i, j)$, $y = (0, j)$ и $z = (i, 0)$. Так f — аддитивная функция, то $f(x) - f(y) = f(z) - f(x_0)$. Отсюда $f(x) = a_j + b_i$. Пусть $x = (i, j) \in B$. Тогда $f(x) = a_j + b_i = b_i \neq 0$. Аналогично имеем, что $f(x) = a_j \neq 0$ для $x = (i, j) \in C$. Значит $|S(f)| \geq k + s + |B| + |C|$. Поэтому $|S(f)| \geq k + s + (q - k - 1)s + (q - s - 1)k$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $k \geq 1$ и $s \geq 1$. Имеем $|S(f)| \geq k + s + (q - k - 1)s + (q - s - 1)k$. Поэтому $|S(f)| \geq 2(q-1) + (q-k-1)(s-1) + (q-s-1)(k-1)$. С другой стороны, $|S(f)| \leq 2(q-1)$. Поэтому либо $k = s = q-1$, либо $k = s = 1$. Пусть $k = s = q-1$. Тогда $f(x) = a_j + b_i = 0$ для $i > 0$ и $j > 0$. Поэтому все a_i равны c , все b_j равны $-c$, где c — некоторая константа. Поэтому в этом случае

$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{при } x \in T_0(2, 2) \setminus T_0(1, 2); \\ -c, & \text{при } x \in T_0(1, 2) \setminus T_0(2, 2); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В случае $k = s = 1$ аналогичным образом получаем, что

$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{при } x \in T_1(2, 2) \setminus T_1(1, 2); \\ -c, & \text{при } x \in T_1(1, 2) \setminus T_1(2, 2); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Случай 2. $k = 0$ или $s = 0$. Без ограничения общности, пусть $k = 0$. В этом случае $|B| = (q - 1)s$. Так как $|S(f)| \leq 2(q - 1)$, то $s < 2$ или $s = 0$. Если $s = 0$, то $f \equiv 0$. Осталось рассмотреть случай $s = 1$. В этом случае $S(f) = B$, $f(x) = b_t$ для некоторого t при $x \in B$ и $f(x) = 0$ для остальных x . □

Множество вершин x графа $H(n, q)$, у которых i -я координата равна k , а j -я равна t , обозначим через $T_{k,m}(i, j, n)$ ($i \neq j$).

Теорема 2. Пусть $f : H(n, q) \rightarrow \mathbb{R}$ — аддитивная функция, $|S(f)| \leq 2(q - 1)q^{n-2}$, $q > 2$ и $n > 1$. Тогда выполнено одно из следующих условий:

1. $f \equiv 0$.
2. $f(x) = c$ при $x \in T_k(i, n)$ и $f(x) = 0$ в остальных случаях, где $c \neq 0$ — некоторая константа.
3. $f(x) = \begin{cases} c, & \text{при } x \in T_k(i, n) \setminus T_m(j, n); \\ -c, & \text{при } x \in T_m(j, n) \setminus T_k(i, n); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$, где $c \neq 0$ — некоторая константа и $i \neq j$.

Доказательство. Докажем теорему индукцией по n . База для $n = 2$ доказана в лемме 3.

Докажем переход от n к $n + 1$. Пусть $f : H(n + 1, q) \rightarrow \mathbb{R}$ — аддитивная функция. Функцию $f|_{T_i(n+1, n+1)}$ обозначим через f_i . Так как f — аддитивная функция, то для всех i имеем $g_{n+1, i, 0} \equiv c_i$ для некоторой константы c_i . Пусть среди чисел c_0, c_1, \dots, c_{q-1} ровно s ненулевых. Так как $|S(f)| \leq 2(q - 1)q^{n-1}$, то для некоторого i имеем $|S(f_i)| \leq 2(q - 1)q^{n-2}$. Без ограничения общности, пусть $i = 0$. Таким образом, $|S(f_0)| \leq 2(q - 1)q^{n-2}$ и f_0 — аддитивная функция. Тогда по предположению индукции для f_0 возможны три варианта.

Случай 1. В этом случае $f_0 \equiv 0$. Тогда $|S(f)| = s|S(f_0)| = sq^n$. Так как $|S(f)| \leq 2(q - 1)q^{n-1}$, то $s < 2$. Если $s = 0$, то $f_i \equiv 0$ для всех i . Отсюда $f \equiv 0$. Пусть $s = 1$ и $c_k \neq 0$. Тогда $f(x) = c_k$ при $x \in T_k(n + 1, n + 1)$ и $f(x) = 0$ в остальных случаях.

Случай 2. В этом случае $f_0(x) = c$ при $x \in T_{0,k}(n + 1, i, n + 1)$ и $f(x) = 0$ в остальных случаях, где $c \neq 0$ — некоторая константа. Заметим, что для $c_i \neq 0$ выполнено неравенство $|S(f_i)| \geq |T_i(n + 1, n + 1)| - |S(f_0)|$, причем равенство выполняется только для $c_i = -c$. Отсюда $|S(f_i)| \geq (q - 1)q^{n-1}$, причем равенство выполняется только для $c_i = -c$.

Тогда $|S(f)| \geq |S(f_0)| + s(q-1)q^{n-1}$. Так как $|S(f)| \leq 2(q-1)q^{n-1}$, то $s < 2$. Если $s = 0$, то $f_m(x) = c$ при $x \in T_{m,k}(n+1, i, n+1)$ и $f(x) = 0$ в остальных случаях для всех m . Отсюда $f(x) = c$ при $x \in T_k(i, n+1)$ и $f(x) = 0$ в остальных случаях. Пусть $s = 1$ и $c_m \neq 0$. Тогда $|S(f_i)| = |S(f_0)| = q^{n-1}$ при $i \neq m$. Так как $|S(f)| \leq 2(q-1)q^{n-1}$, то $|S(f_m)| \leq (q-1)q^{n-1}$. Поэтому $|S(f_m)| = (q-1)q^{n-1}$ и $c_m = -c$.

$$\text{Отсюда } f(x) = \begin{cases} c, & \text{при } x \in T_k(i, n+1) \setminus T_m(n+1, n+1); \\ -c, & \text{при } x \in T_m(n+1, n+1) \setminus T_k(i, n+1); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Случай 3. В этом случае $|S(f_0)| = 2(q-1)q^{n-2}$. Так как для $c_i \neq 0$ выполнено неравенство $|S(f_i)| \geq |T_i(n+1, n+1)| - |S(f_0)|$, то $|S(f_i)| \geq q^n - 2(q-1)q^{n-2}$ для $c_i \neq 0$. Поэтому $|S(f_i)| > 2(q-1)q^{n-2}$ при $c_i \neq 0$ и $q \geq 3$. Таким образом, $|S(f)| \geq q(2(q-1)q^{n-2})$, причем равенство возможно только в случае, когда все c_i равны нулю. Следовательно, $c_i = 0$ для любого i .

Поэтому для любого s имеем

$$f_s(x) = \begin{cases} c, & \text{при } x \in T_{s,k}(n+1, i, n) \setminus T_{s,m}(n+1, j, n); \\ -c, & \text{при } x \in T_{s,m}(n+1, j, n) \setminus T_{s,k}(n+1, i, n); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\text{Следовательно, } f(x) = \begin{cases} c, & \text{при } x \in T_k(i, n+1) \setminus T_m(j, n+1); \\ -c, & \text{при } x \in T_m(j, n+1) \setminus T_k(i, n+1); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

□

$$\textbf{Утверждение 1.} \text{ Пусть } f(x) = \begin{cases} c, & \text{при } x \in T_k(i, n) \setminus T_m(j, n); \\ -c, & \text{при } x \in T_m(j, n) \setminus T_k(i, n); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

где $c \neq 0$ — некоторая константа, i, j, k, m — некоторые числа. Тогда f — собственная функция, отвечающая собственному значению λ_1 .

Доказательство. Пусть x — произвольная вершина $H(n, q)$, для которой $f(x) = c$. Тогда x имеет $(n-1)(q-1) - 1$ соседей в $T_k(i, n) \setminus T_m(j, n)$ и не имеет соседей в $T_m(j, n) \setminus T_k(i, n)$. Тогда сумма значений функции f по всем соседям x равна $c(n-1)(q-1) - c$, то есть равна $\lambda_1 f(x)$. Случай $f(x) = -c$ рассматривается аналогично.

Рассмотрим вершину x , для которой $f(x) = 0$. Эта вершина имеет одного соседа из $T_k(i, n) \setminus T_m(j, n)$ и одного соседа из $T_m(j, n) \setminus T_k(i, n)$. Тогда сумма значений функции f по всем соседям x равна 0, то есть равна $\lambda_1 f(x)$.

□

Теперь докажем основную теорему данной работы.

Теорема 3. Пусть $f : H(n, q) \rightarrow \mathbb{R}$ — собственная функция, отвечающая собственному значению λ_1 и $q > 2$. Тогда $|S(f)| \geq 2(q-1)q^{n-2}$. Более того,

$$\text{если } |S(f)| = 2(q-1)q^{n-2}, \text{ то } f(x) = \begin{cases} c, & \text{при } x \in T_k(i, n) \setminus T_m(j, n); \\ -c, & \text{при } x \in T_m(j, n) \setminus T_k(i, n); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

где $c \neq 0$ — некоторая константа, i, j, k, m — некоторые числа, причем $i \neq j$.

Доказательство. Пусть f — собственная функция с минимальным носителем. По утверждению 1 $|S(f)| \leq 2(q-1)q^{n-2}$. Так как f — собственная функция, то по лемме 2 f — аддитивная функция. Так как $|S(f)| \leq 2(q-1)q^{n-2}$, то по теореме 2 для f возможны три варианта. Учитывая, что f — собственная функция, получаем, что возможен только третий вариант, что и доказывает теорему. □

4 Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность Д. С. Кротову, И. Ю. Могильных, К. В. Воробьеву и В. Н. Потапову за полезные замечания и обсуждения.

Список литературы

- [1] К. В. Воробьев, Д. С. Кротов. Оценки мощности минимального 1-совершенного битрейда в графе Хэмминга, Дискретн. анализ и исслед. опер., 2014, Т. 21, вып. 6, С. 3–10.
- [2] V. N. Potapov. On perfect 2-colorings of the q-ary n-cube, Discrete Math., 2012, V. 312, N. 8, 1269-1272.